保密★使用前

泉州市2021届高中毕业班质量监测（三）参考答案与评析

高三数学选择题部分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知$\mathbf{i}$是虚数单位，则“$a=\mathbf{i}$”是“$a^2=-1$”的

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【命题意图】本小题以复数为载体，考查虚数单位的含义、复数的运算、充分必要条件等基础知识；考查运算求解能力；考查数学运算和逻辑推理核心素养，体现基础性.

【试题简析】$a^2=-1$，即$a=\pm\mathbf{i}$，故“$a=\mathbf{i}$”是“$a=\pm\mathbf{i}$”的充分不必要条件.

故选A.

【评析】以复数为载体，重在考查逻辑用语中的充要条件，考查对学科语言的理解。

2．已知集合$A=\{(x,y)\,|\,x+y=8,x,y\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y>x+1\}$，则$A\cap B$中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【命题意图】本小题主要考查集合的描述法、集合的运算等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性，导向对发展逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】由已知可得$8=x+y>x+x+1$，所以$x<3.5$，又$x\in\mathbf{N}^*$，所以$x=1,2,3$，

所以$A\cap B=\{(1,7),(2,6),(3,5)\}$，共3个元素.

故选B.

【评析】意在考查集合的表示和运算等集合，同时隐含对线性规划问题的教学要求的调整建议（定位为直线方程的应用）。

3．函数$y=\cos 2x+\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)$的最小值为

A．-2　　B．$-\dfrac{9}{8}$　　C．$-\dfrac{5}{8}$　　D．0

【命题意图】本小题主要考查诱导公式、二倍角公式、二次函数的最值等基础知识；考查运算求解能力；考查转化与化归思想；体现基础性，导向对发展数学运算、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题简析】$y=\cos 2x+\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)=2\cos^2 x+\cos x-1$，

令 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $y=2t^2+t-1=2(t+\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$，

所以当 $t=-\frac{1}{4}$ 时，$y=\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 有最小值 $-\frac{9}{8}$.

故选 B.

【评析】本题以三角函数为背景，在恒等变换的基础上，通过换元法转化化归为区间上的二次函数问题，着重体现对转化与化归思想的考查。

4．“立定跳远”是《国家学生体质健康标准》测试项目中的一项．已知某地区高中男生的立定跳远测试数据 ξ（单位：cm）服从正态分布 $N(200,\sigma^2)$，且 $P(\xi\geqslant 220)=0.1$，现从该地区高中男生中随机抽取 3 人，并记 ξ 不在 $(180,220)$ 的人数为 X，则

A．$P(180<\xi<220)=0.9$　　B．$E(X)=2.4$

C．$D(X)=0.16$　　D．$P(X\geqslant 1)=0.488$

【命题意图】本小题主要考查正态分布、二项分布等基础知识；考查运算求解、数据处理等能力，考查数形结合思想；体现基础性、创新性、应用性，导向对发展数据分析、数学运算、直观想象等核心素养的关注．

【试题简析】因为 $\xi\sim N(200,\sigma^2)$，所以 $P(\xi\leqslant 180)=P(\xi\geqslant 220)=0.1$，

则 $P(180<\xi<220)=1-2P(\xi\geqslant 220)=0.8$，故 A 错误．

因为 $x\sim B(3,0.2)$，故 $E(X)=3\times 0.2=0.6$，故 B 错误；

$D(X)=3\times 0.8\times 0.2=0.48$，故 C 错误；

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.8^3=0.488$，故 D 正确．

故选 D.

【评析】本题情境选取体现五育融合的立意，考查概率板块中的正态分布、二项分布的模型识别和期望方差计算公式等基础知识。关注正态分布曲线的几何意义、数形结合思想的运用、概率分布模型的识别问题。

5．已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}$，且 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$

A．$\frac{\sqrt{55}}{8}$　　B．$\frac{3\sqrt{6}}{8}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{8}$　　D．$\frac{3}{8}$

【命题意图】本题考查向量及其分解与合成、向量的数量积、两个向量所成角及向量运算等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力或数形结合思想；体现基础性、综合性，导向对发展数学运算、

直观想象、逻辑推理等核心素养的关注．

【试题简析】因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\left(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=2\boldsymbol{a}^{2}+\boldsymbol{ab}=\frac{9}{4}$，

又因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，且 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{\boldsymbol{c}^{2}}=\sqrt{\left(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)^{2}}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^{2}+4\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}}=\sqrt{6}$，

则 $\cos\left\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{9}{4\sqrt{6}}$，故 $\sin\left\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right\rangle=\frac{\sqrt{10}}{8}$．

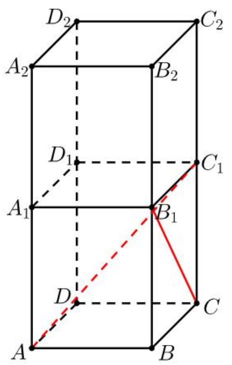
故选 C．

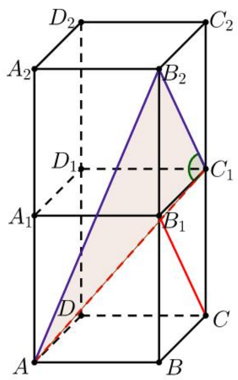
【评析】向量问题有两个处理思路，一是直接从运算入手（如前述解答），二是构图从几何意义入手，结合图形寻找解题方案，两种思路各有优缺点。第二种思路的运算中，涉及正、余弦定理的应用，但思维量大、运算难度也较大。

6．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值为

A．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B．$\frac{1}{12}$　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D．$-\frac{1}{12}$

【命题意图】本题考查立体几何中的位置关系、异面直线所成的角的概念，以及解三角形等基本知识；考查空间想象能力和运算求解能力；考查化归与转化的数学思想；考查直观想象和数学运算、逻辑推理等核心素养．





【试题简析】如图，补形，补一个完全一样的长方体，得到长方体 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$，则直线 $B_2C_1 \parallel B_1C$，

于是异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角为 $\angle AC_1B_2$ 或其补角，

在 ΔAC_1B_2 中，$AC_1=\sqrt{1+1+2}=2, B_2C_1=\sqrt{3},$

$AB_2=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^{2}+1}=3$，由余弦定理，得 $\cos\angle AC_1B_2=\left|\frac{4+3-9}{2\times 2\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{6}$．

故选 A．

【评析】本题可作为线线角问题的典型题例，解题方法多样。基本思路为将异面角转化化归为共面角（相交直线的交角），可原图形内平移直线转化，也可如前述解法补形后转化；本题还可通过建系后，使用坐标法求解。

本题最简单的做法是直接使用向量法：$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{B_1C}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，利用向量数量积公式容易求解。因为三个基本向量两两垂直，故运算过程非常简捷。警示如何定位与领会向向量课程的工具价值，如何形成自觉的工具运用意识。

7．已知$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，$c=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$，则

A．$a>b>c$　　B．$c>b>a$　　C．$c>a>b$　　D．$a>c>b$

【命题意图】本小题主要考查对数运算、函数单调性等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化等思想；体现综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】因为$a^2=\dfrac{9}{4}>2$，$b^2=\dfrac{3}{2}<2$，所以$a^2>b^2$，又因为$a,b>0$，所以$a>b$（排除B），$3\ln 2=\ln 8<\ln 9=2\ln 3$，且$\ln 2>0$，所以$\dfrac{3}{2}<\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$（排除A、D），所以$c>a>b$.故选C.

【评析】本题是三数排序的比较大小问题，可优先选择比较熟悉的两数先进行比较，结合选择题特点排除部分选项，以提高正确选择的概率。如选a,b，还可通过考察$y=(\dfrac{3}{2})^x$的单调性得$a>b$，从而排除B；如选a,c，还可把c改写为$\log_2 3$，从而想到将a改写为$\log_2 2^{\frac{3}{2}}$，进而先比较3和$2\sqrt{2}$的大小，得$c>a$，排除A、D.

8．已知曲线$E:(y^2-4x)(y^2+8x)=0$，直线$x=my+1$与E有且只有4个公共点，这些公共点从左到右依次为A,B,C,D，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则下列结论中错误的是

A．$m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$m<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$x_1<-1<x_2$

C．$|CD|>6$　　D．$|AB|<\sqrt{2}|CD|$

【命题意图】本小题主要考查直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解和推理论证等能力；考查函数和方程、数形结合、转化与化归等数学思想；体现综合性、应用性和创新性，导向对发展数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题简析】由已知，曲线C为抛物线$y^2=4x$和抛物线$y^2=-8x$，

直线 $x=my+1$ 过定点 $(1,0)$，故直线必与抛物线 $y^2=4x$ 有两个不同的交点.

直线还需与抛物线 $y^2=-8x$ 有两个不同的交点.

联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=-8x \end{cases}$ 可得 $y^2+8my+8=0$，

令判别式 $\Delta=64m^2-32>0$ 可得 $m^2>\dfrac{1}{2}$，故 $m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，选项 A 正确.

又 $y_1y_2=8$，所以 $x_1\cdot x_2=(-\dfrac{y_1^2}{8})\cdot(-\dfrac{y_2^2}{8})=1$，且 $x_1<x_2<0$，故 $x_1<-1<x_2$，

选项 B 正确.

同时 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{64m^2-32}=4\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{4m^2-2}$.

联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$，

同理可得 $|CD|=4(1+m^2)$，因为 $m^2>\dfrac{1}{2}$，所以 $|CD|>6$，选项 C 正确.

$\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{\sqrt{4m^2-2}}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{4-\dfrac{6}{1+m^2}}<2$，即 $|AB|<2|CD|$，选项 D 错误.

故选 D.

【评析】可由图形直观判断，当动直线与左抛物线相切时，$|CD|$ 取得最小值，经计算 $|CD|_{\min}=6$，从而 C 正确。若已能判断 A,B 正确，已基本可确定 D 错误，可绕开判断 D 正误的难点.

保密★使用前

泉州市2021届高中毕业班质量监测（三）参考答案与评析

高三数学选择题多选题部分

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。

9．记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$a_2=10$，$S_5=S_2$，则

A．$S_3=S_4$　　B．$a_6=10$　　C．S_n的最大值为30　　D．a_n的最大值为15

【命题意图】本小题主要考查等差数列的通项、前n项和、性质及最值等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化等思想；体现综合性、综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】由$S_5=S_2$，得$S_5-S_2=a_3+a_4+a_5=3a_4=0$，即$a_4=0$，故$S_3=S_4$，A正确；

又由$a_2=10$，可求得$a_6=-10$，B错误；

又由$S_3=S_4$，及数列为递减数列，知S_n的最大值为$S_4=S_3=3a_2=30$，C正确；

再由$\{a_n\}$的公差$d=\dfrac{a_4-a_2}{2}=-5$，得a_n的最大值为$a_1=a_2-d=15$，D正确.

另解：由$S_5=S_2$，得$S_5-S_2=a_3+a_4+a_5=3a_4=0$，即$a_4=0$，

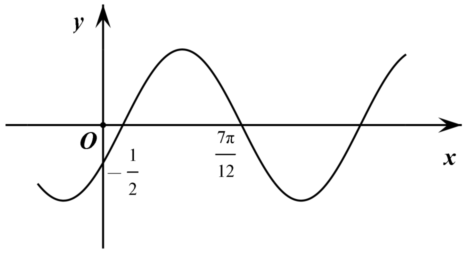
则$\{a_n\}$的公差$d=\dfrac{a_4-a_2}{2}=-5$，得$a_n=a_4+(n-4)d=20-5n$，$a_6=-10$.

则$\{a_n\}$为递减数列，故$S_3=S_4$，S_n的最大值为$S_4=S_3=30$，a_n的最大值为$a_1=15$.

故选ACD.

【评析】本题综合考查等差数列的概念、通项公式、前n项和公式，以及常用的基本性质，可作为复习训练的典型例题使用。

10．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|\le\dfrac{3\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则



A．$\omega=2$　　B．$\omega=\dfrac{26}{7}$　　C．$\varphi=\dfrac{7\pi}{6}$　　D．$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质等基础知识；考查推理论证能力、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想；体现综合性，试题着重考查理性思维和数学探究，导向对发展数学运算、直观想象、数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】**解法一：** 由图象过点$(0,-\frac{1}{2})$，得$\sin\phi=-\frac{1}{2}$，

又由$|\varphi|\le\frac{3\pi}{2}$，得$\varphi=-\frac{5\pi}{6}$或$\varphi=-\frac{\pi}{6}$或$\varphi=\frac{7\pi}{6}$.

由$\frac{T}{2}<\frac{7\pi}{12}<\frac{3T}{4}$，得$\frac{12}{7}<\omega<\frac{18}{7}$（※）.

由图象过点$(\frac{7\pi}{12},0)$，且此点在递减区间内，得$\frac{7\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

①当$\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{12}\omega+\varphi=2k\pi+\frac{11\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

若$k=0$，得$\omega=\frac{22}{7}$，不满足（※）；若k取其它整数，ω均不满足（※）；

②当$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{12}\omega+\varphi=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

若$k=0$，得$\omega=2$，满足（※）；若k取其它整数，ω均不满足（※）；

③当$\varphi=\frac{7\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{12}\omega+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

若$k=1$，得$\omega=\frac{22}{7}$，不满足（※）；若k取其它整数，ω均不满足（※）.

综上所述，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 故选 AD.

解法二： 由图象可知，$\frac{T}{2}<\frac{7\pi}{12}<\frac{3T}{4}$，又$T=\frac{2\pi}{\omega}$，则$\frac{12}{7}<\omega<\frac{18}{7}$（排除 B），故$\omega=2$，

若$\varphi=\frac{7\pi}{6}$，$f(x)=\sin(2x+\frac{7\pi}{6})$，$f'(x)=2\cos(2x+\frac{7\pi}{6})$，$f'(0)<0$，不符合图象特征，

经检验，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故选项 C 错误，选项 D 正确.

故选 AD.

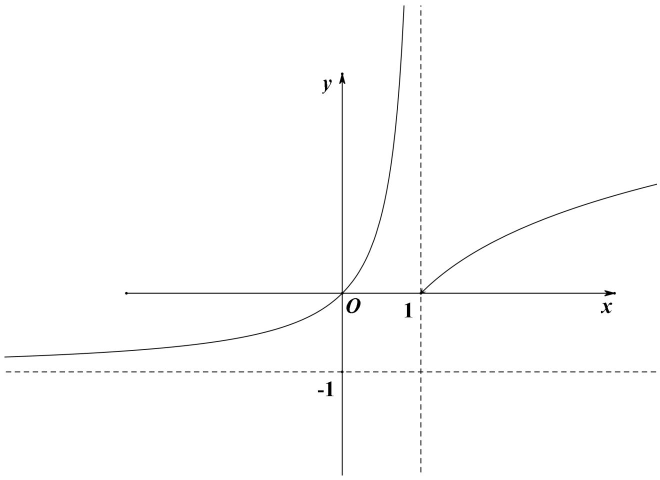
11．已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x},x<1,\\ \ln x,x\geqslant1,\end{cases}$ $g(x)=kx-k$，则

A．$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数　　B．当$k=\frac{1}{4}$时，方程$f(x)=g(x)$有且只有 3 个不同实根

C．$f(x)$的值域为$(-1,+\infty)$　　D．若$(x-1)(f(x)-g(x))\leqslant0$，则$k\in[1,+\infty)$

【命题意图】本小题主要考查基本初等函数，函数的图象与性质，函数与方程，不等式恒成立，导数的几何意义等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化，数形结合等思想；导向对发展逻辑推理、数学运算等理性思维与数学探究核心素养的关注.

【试题简析】函数 $f(x)$ 的图象如图



结合图象，可得选项 A 错误，选项 C 正确；

函数 $g(x)=kx-k$ 的图象为过定点 $\left(1,0\right)$ 的直线，

对于选项 B，当 $k=\dfrac{1}{4}$ 时，由 $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$，得 $x^2+2x+1=0$，

所以直线 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$ 与 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 相切，$y=\ln x$ 在 $\left(1,0\right)$ 切线为 $y=x-1$，

所以直线 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$ 与函数 $y=\ln x$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 有两个交点，

函数 $f(x)$ 图象与函数 $g(x)$ 图象有 3 个交点，所以方程 $f(x)=g(x)$ 有 3 个不同实根，

选项 B 正确；

对于选项 D，不等式 $\left(x-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)\leqslant 0$ 恒成立等价于

$x>1$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，$x<1$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.

（i）$x>1$ 时，$\ln x\le kx-k$，此时 $k\geqslant 1$；

（ii）$x<1$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$，此时 $k\geqslant\dfrac{1}{4}$.

综上，不等式 $\left(x-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)\geqslant 0$ 恒成立等价于 $k\geqslant 1$，选项 D 正确.

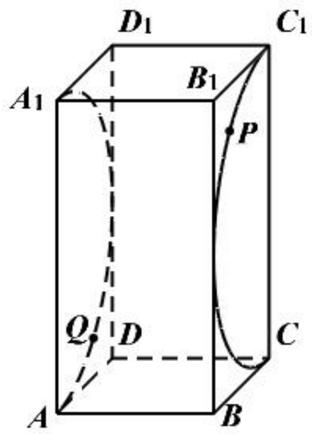
故选 BCD.

【评析】本题是典型的给不同水平的学生提供展示机会的试题，是训练如何恰到好处见好就收的典型试题。

如：由特殊值 $f(0)=0,f(1)=0$，判断选项 A 错误，增加选择出部分正确选项的概率；由于 $y=\dfrac{x}{1-x}=-1-\dfrac{1}{x-1}$，经历 $y=\dfrac{1}{x}\Rightarrow y=\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y=-1-\dfrac{1}{x-1}$ 的图象变换过程，得到 $y=\dfrac{x}{1-x}(x<1)$ 的图象，判断 $f(x)$ 的值域为 $(-1,+\infty)$，而单选 C；或由 $x\ge 1\Rightarrow \ln x\ge 0$，

$x<1\Rightarrow x-1<0,\dfrac{1}{x-1}<0\Rightarrow -\dfrac{1}{x-1}>0\Rightarrow y=-1-\dfrac{1}{x-1}>-1$，判断 $f(x)$ 的值域为 $(-1,+\infty)$，而单选 C.

12．如图，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 2，点 P,Q 分别在半圆弧 $\overset{\frown}{C_1C}$，$\overset{\frown}{A_1A}$（均不含端点）上，且 C_1,P,Q,C 在球 O 上，则



A．当点 P 在 $\overset{\frown}{C_1C}$ 的中点处，三棱锥 C_1-PQC 的体积为定值

B．当点 P 在 $\overset{\frown}{C_1C}$ 的中点处，过 C_1,P,Q 三点的平面截正四棱柱所得的截面的形状都是四边形

C．球 O 的表面积的取值范围为 $(4\pi,8\pi)$

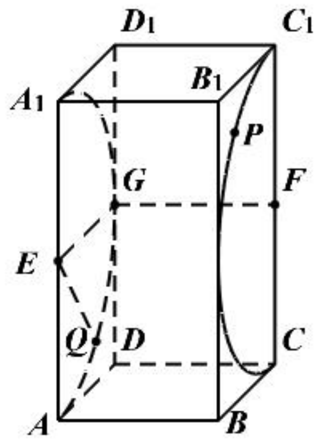
D．当点 Q 在 $\overset{\frown}{A_1A}$ 的三等分点处，球 O 的表面积为 $(11-4\sqrt{3})\pi$

【命题意图】本题考查空间位置关系、度量关系等基础知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想；体现综合性、创新性，导向对发展数学运算、逻辑推理、直观想象、数学抽象等核心素养的关注.

【试题简析】对于 A 选项，因为点 Q 到平面 B_1BCC_1 的距离为定值 1，C_1,P,C 是定点，所以三棱锥 C_1-PQC 的体积为为定值（$\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta C_1CP}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{3}$，不必求出），故 A 正确；

对于 B 选项，当点 Q 在半圆弧 A_1A（不含端点）从上往下运动时，过 C_1,P,Q 三点的平面截正方体所得的截面的形状依次为梯形（**已可排除 B**）、平行四边形、五边形，故 B 错误；

对于 C 选项，



解法一：记 E，F，G 分别为 AA_1，CC_1，DD_1 的中点，

连接 EG，FG，EQ，因为 $\triangle C_1CP$ 为直角三角形，

所以 F 为 $\triangle C_1CP$ 的外心，

又因为 $GF\perp$ 面 C_1CP，所以球心 O 在线段 FG 上，

设 $\angle GEQ=\theta$，$|OG|=x$，则 $|OF|=1-x$，

由余弦定理得 $|QG|=\sqrt{2-2\cos\theta}$，

则 $|OQ|^2=|OG|^2+|QG|^2=x^2+(2-2\cos\theta)$，$|OC|^2=(1-x)^2+1=x^2-2x+2$，

因为 $|OQ|=|OC|$，所以 $x^2+2-2\cos\theta=x^2-2x+2$，即 $x=\cos\theta$，

所以 $R^2=(\cos\theta-1)^2+1$，因为 $\cos\theta\in(0,1]$，所以 $R^2\in[1,2)$.

所以外接球表面积的取值范围为 $[4\pi,8\pi)$.

解法二：用极端法考虑．当点 Q 位于 A_1 或 A_2 处，面积取最大值 8π；当点 Q 位于 G 处，面积取最小值 4π，又因为 Q 与 A_1 或 A_2 不重合，所以外接球表面积的取值范围为 $[4\pi,8\pi)$，故 C 错误；

解法三：当点 P,Q 分别在半圆弧 $\overset{\frown}{C_1C}$ ，$\overset{\frown}{A_1A}$ 的中点处时，球心 O 在 CC_1 的中点处，易知球半径为 1，面积为 4π，故 C 错误.

对于 D 选项，当点 Q 位于三等分处，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，此时 $R^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+1=\dfrac{11}{4}-\sqrt{3}$，则外接球表面积为 $\left(11-4\sqrt{3}\right)\pi$．故 D 正确.

故选 AD.

保密★使用前

泉州市 2021 届高中毕业班质量监测（三）参考答案与评析

高三数学填空题部分

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$(x+2)^6$ 展开式中，二项式系数最大的项的系数为_________.（用数字填写答案）

【命题意图】本小题主要考查二项式定理等基础知识，考查运算求解能力，体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注．

【试题简析】依题意，二项式系数最大项为 $T_4=C_6^3x^3 2^3=160x^3$，其系数为 160．

故答案为 160．

14．甲问乙："您有几个孩子"，乙说："四个"．此时，一男孩过来．乙对甲说："这是我小孩"，接着乙对该男孩说："去把哥哥姐姐都叫过来，你们四人一起跟甲去趟学校"．

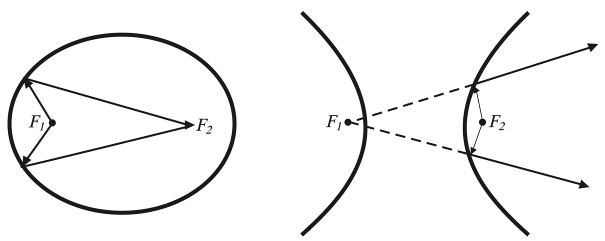
根据上述信息，结合正确的推理，最多需要猜测_________次，才可以推断乙的四个小孩从长到幼的正确性别情况；第 3 次才猜对的概率为_________.（第一空 2 分；第二空 3 分）

【命题意图】本小题主要考查古典概型等基础知识；考查阅读理解并提取信息进行推理论证的能力；体现基础性、创新性、应用性，导向对发展理性思维与数学应用等核心素养的关注．

【试题简析】 记 A_i 为乙的第 i 个孩子是男性，依题意，四个孩子从长到幼的性别情况有 $(\overline{A_1},A_2,A_3,A_4)$，$(A_1,\overline{A_2},A_3,A_4)$，$(A_1,A_2,\overline{A_3},A_4)$，$(A_1,\overline{A_2},\overline{A_3},A_4)$，$(\overline{A_1},A_2,\overline{A_3},A_4)$，$(\overline{A_1},\overline{A_2},A_3,A_4)$，共 6 种，最多需要猜测 5 次，便可以知道乙的四个小孩从长到幼的正确性别情况；第 3 次就猜对的概率为 $\dfrac{1}{6}$．

故答案为 5；$\dfrac{1}{6}$．

15．圆锥曲线光学性质（如图 1 所示）在建筑、通讯、精密仪器制造等领域有着广泛的应用．如图 2，一个光学装置由有公共焦点 F_1,F_2 的椭圆 C 与双曲线 C' 构成，一光线从左焦点 F_1 发出，依次经过 C' 与 C 的反射，又回到点 F_1 历时 m 秒；若将装置中的 C' 去掉，则该光线从点 F_1 发出，经过 C 两次反射后又回到点 F_1 历时 n 秒．若 C 与 C' 的离心率之比为 $\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{m}{n}=$_________.



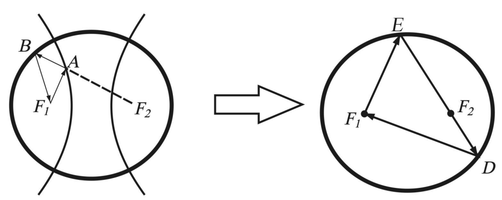


图 1　　　　　　　　　　　　　　　　　　图 2

【命题意图】本题考查椭圆定义、双曲线定义、离心率等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想；体现综合性、创新性，导向对发展数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养的关注.

【试题简析】设椭圆的长半轴长为 a_1，双曲线的实半轴长为 a_2，

在图 2 左图中，由椭圆定义可得 $|BF_1|+|BF_2|=2a_1$ ……①

由双曲线定义可得 $|AF_2|-|AF_1|=2a_2$ ……②

①−②得 $|AF_1|+|AB|+|BF_1|=2a_1-2a_2$，

所以 ΔABF_1 的周长为 $2a_1-2a_2$.

在图 2 右图中，光线从椭圆的一个焦点发出，被椭圆反射后经过椭圆的另一个焦点，

即直线 ED 过点 F_2，所以 ΔEDF_1 的周长为 $4a_1$，

又因为椭圆与双曲线焦点相同，离心率之比为 $\dfrac{1}{3}$，

所以 $a_1=3a_2$，又两次所用时间分别为 m,n，

而光线速度相同，所以 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2a_1-2a_2}{4a_1}=\dfrac{6a_2-2a_2}{12a_2}=\dfrac{1}{3}$.

16．若正数 x,y 满足 $xy\left(x+2y\right)=16$，则 $x+y$ 的最小值为________.

【命题意图】本小题主要考查不等式、函数与导数等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化等思想；导向对发展逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】令 $t=x+y$，则 $\left(t-y\right)y\left(t+y\right)=y\left(t^2-y^2\right)=16$

所以 $t^2=\dfrac{16}{y}+y^2$，令 $f(y)=\dfrac{16}{y}+y^2$，由 $f'(y)=-\dfrac{16}{y^2}+2y=0$，解得 $y=2$.

$y\in\left(0,2\right)$ 时，$f'(y)<0$，$f(y)$ 单调递减，$y\in\left(2,+\infty\right)$ 时，$f'(y)>0$，$f(y)$ 单调递增；

所以 $f(y)$ 的最小值为 $f(2)=12$，又对正数 x,y 有 $t=x+y>0$，所以 $t_{\min}=2\sqrt{3}$.

保密★使用前

泉州市2021届高中毕业班质量监测（三）参考答案与评析

高三数学解答题17-19题部分

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=9$，$a_{n+1}=10a_n+9$，$b_n=a_n+1$.

（1）证明：$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{(-1)^n\lg b_n\}$的前n项和S_n.

【命题意图】本小题主要考查等比数列的定义与前n项和等基础知识；考查运算求解能力；考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等．体现基础性和综合性，导向对发展数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）依题意，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}$ ………………………………………………………………1分

$=\dfrac{10a_n+9+1}{a_n+1}=\dfrac{10a_n+10}{a_n+1}=10$（非零常数）．……………………………2分

又$b_1=a_1+1=10$．故$\{b_n\}$为首项$b_1=10$，公比$q=10$的等比数列．………………3分

（2）（1）由可知$b_n=b_1q^{n-1}=10^n$．…………………………………………………………4分

所以$c_n=(-1)^n\lg b_n=(-1)^n\lg 10^n=(-1)^n\cdot n$．………………………………………5分

①当n为偶数时，$S_n=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(n-1)+n]=\dfrac{n}{2}$；………………7分

②当n为奇数时，$S_n=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(n-2)+(n-1)]-n=-\dfrac{n+1}{2}$．9分

$$故S_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2},n为偶数,\\ -\dfrac{n+1}{2},n为奇数.\end{cases}$$ ………………………………………………（结论分）10分

解法二：（1）同解法一；

（2）由（1）可知$b_n=b_1q^{n-1}=10^n$．……………………………………（通项公式分）4分

所以$c_n=(-1)^n\lg b_n=(-1)^n\lg 10^n=(-1)^n\cdot n$．…………………………………（运算分）5分

$S_n = 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1)^2 + \cdots (n-1)\cdot(-1)^{n-1} + n\cdot(-1)^n$ ①

$(-1)S_n = 1\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)^3 + \cdots + (n-1)\cdot(-1)^n + n\cdot(-1)^{n+1}$ ②………（方法分）6 分

①-②得 $2S_n = (-1) + (-1)^2 + \cdots (-1)^n - n\cdot(-1)^{n+1}$ …………………………（方法分）7 分

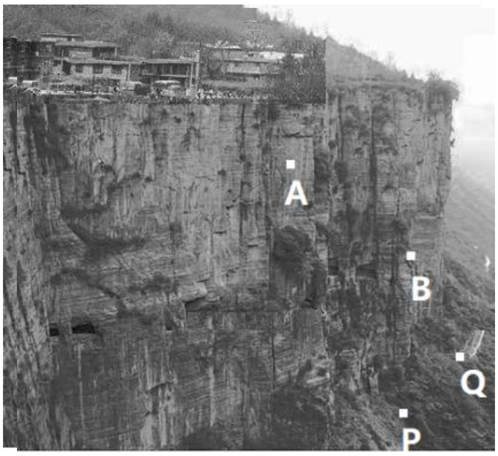
$= \dfrac{(-1)[1-(-1)^n]}{1-(-1)} - n\cdot(-1)^{n+1}$ …………………（等比数列求和公式分）9 分

$= \dfrac{(-1)-(-1)^{n+1}}{2} - n\cdot(-1)^{n+1} = -\dfrac{1}{2} - (\dfrac{1}{2} + n)\cdot(-1)^{n+1}$

故 $S_n = -\dfrac{1}{4} - (\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{2})\cdot(-1)^{n+1}$. ………………………………………………（结论分）10 分

18.（12 分）

脱贫攻坚取得的全面胜利是中国共产党领导全国人民创造的又一个彪炳史册的人间奇迹.某地区有一贫困村坐落于半山平台，村民通过悬崖峭壁间的藤条结成的“藤梯”往返村子，因而被称为“悬崖村”．当地政府把“藤梯”改成钢梯，使之成为村民的“脱贫天梯”，实现了“村民搬下来，旅游搬上去”，做到了长效脱贫.



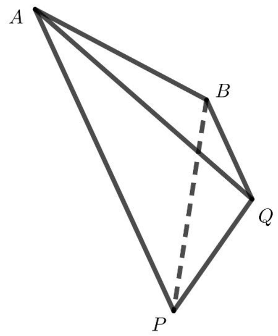
如图，为得到峭壁上的 A,B 两点的距离，钢梯的设计团队在崖底的 P,Q 两点处分别测得 $\angle APQ = \alpha_1$，$\angle BPQ = \beta_1$，$\angle APB = \theta$，$\angle AQP = \alpha_2$，$\angle BQP = \beta_2$，且 $PQ = s$.

（1）用 α_1, α_2, s 表示 AP；

（2）已知 $\beta_1 = 17°$，$\beta_2 = 150°$，$s = 90.0$ 米，$\theta = 51.3°$，又经计算得 $AP = 250.0$ 米，求 AB .

参考数据：$\sin 13° \approx 0.225$，$\cos 13° \approx 0.974$，$\sin 51.3° \approx 0.780$，$\cos 51.3° \approx 0.625$.

【命题意图】本小题以“悬崖村”的脱贫事件为背景，以修建钢梯的测量为问题情境，考查正弦定理、余弦定理，解三角形等基础知识；考查抽象概括能力，空间想象能力，运算求解能力与应用意识和创新意识；考查转化与化归思想，函数与方程思想；考查基本活动经验；导向对数学抽象，数学建模，数学运算核心素养的关注.



【试题解析】（1）如图，在$\triangle APQ$中，根据正弦定理得$\dfrac{AP}{\sin\alpha_2}=\dfrac{PQ}{\sin\left(\pi-\alpha_1-\alpha_2\right)}$，…………………3 分

化简得$AP=\dfrac{s\cdot\sin\alpha_2}{\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}$；…………………5 分

（2）在$\triangle BPQ$中，根据正弦定理得$\dfrac{BP}{\sin\beta_2}=\dfrac{PQ}{\sin\left(\pi-\beta_1-\beta_2\right)}$，…………………6 分

可得$BP=\dfrac{s\cdot\sin\beta_2}{\sin\left(180^\circ-\beta_1-\beta_2\right)}=\dfrac{90\times0.5}{0.225}=200$，…………………7 分

又在$\triangle ABP$中，根据余弦定理得$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cos\theta$…………10 分

代入得$AB^2=40000+62500-2\times200\times250\times0.625=40000$，

所以$AB=200$米．…………………12 分

19．（12 分）

永春老醋以其色泽鲜艳、浓香醇厚的独特风味，与山西陈醋、镇江香醋、保宁药醋并称中国四大名醋．为提高效率、改进品质，某永春老醋生产公司于 2018 年组织技术团队进行发酵工艺改良的项目研究．2020 年底，技术团队进行阶段试验成果检验，为下阶段的试验提供数据参考．现从改良前、后两种发酵工艺生产的成品醋中，各随机抽取 100 件进行指标值M的检测，检测分两个步骤，先检测是否合格，若合格，再进一步检测是否为一等品．因检测设备问题，改良后的成品醋有 20 件只进行第一步检测且均为合格，已完成检测的 180 件成品醋的最终结果如下表所示．

指标区间	$[-2,-1)$		$[-1,0)$		$[0,1)$		$[1,2)$		$[2,3)$		$[3,4)$	
来源	改良前	改良后	改良前	改良后	改良前	改良后	改良前	改良后	改良前	改良后	改良前	改良后
个数	3	1	5	2	30	26	31	34	24	15	7	2

附：成品醋的品质采用指标值M进行评价，评价标准如下表所示．

$M\in[0,1)$	$M\in[1,3)$	$M\notin[0,3)$
一等品	二等品	三等品
合格		不合格

（1）现从样本的不合格品中随机抽取 2 件，记来自改良后的不合格品件数为 X，求 X 的分布列；

（2）根据以往的数据，每销售一件成品醋的利润 y（单位：元）与指标值 M 的关系为

$y=\begin{cases}5, & M\in[0,1),\\ 3, & M\in[1,3),\\ -2, & M\notin[0,3).\end{cases}$ 若欲实现“改良后成品醋利润比改良前至少增长 20%”，则 20 件还未进一步检测的样本中，至少需要几件一等品？

【命题意图】本小题主要考查条件概率、独立性检验、数学期望等基础知识；考查数据处理能力、应用意识和创新意识等；考查统计与概率思想；导向对发展逻辑推理、数学运算、数学建模、数据分析等核心素养的关注．

【试题解析】（1）依题意，已检测的不合格品样本共有 20 个，

其中改良前的有 15 个，改良后的有 5 个．……………………………………………2 分

$X=0,1,2$．……………………………………………………………………………3 分

$P(X=0)=\dfrac{C_{15}^{2}\cdot C_{5}^{0}}{C_{20}^{2}}=\dfrac{21}{38}$；……………………………………………………4 分

$P(X=1)=\dfrac{C_{15}^{1}\cdot C_{5}^{1}}{C_{20}^{2}}=\dfrac{15}{38}$；……………………………………………………5 分

$P(X=2)=\dfrac{C_{15}^{0}\cdot C_{5}^{2}}{C_{20}^{2}}=\dfrac{1}{19}$．……………………………………………………6 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{21}{38}$	$\dfrac{15}{38}$	$\dfrac{1}{19}$

（2）**由样本估计总体的思想，……………………………………………………………………7 分**

改良前成品醋利润的数学期望 $5\times\dfrac{30}{100}+3\times\dfrac{55}{100}+(-2)\times\dfrac{15}{100}=2.85$；…………8 分

若要使“改良后成品醋利润比改良前至少增长 20%”，

则改良后的利润至少应为 $2.85\times(1+20\%)=3.42$．……………………………………9 分

假设改良后 20 个还未进行进一步检测的样本中，一等品有 x 个，

则，改良后的一等品有$26+x$个，二等品有$69-x$个.

改良后成品醋利润的数学期望$5\times\frac{26+x}{100}+3\times\frac{69-x}{100}+(-2)\times\frac{5}{100}$．……………10 分

依题意，$5\times\frac{26+x}{100}+3\times\frac{69-x}{100}+(-2)\times\frac{5}{100}\geqslant 3.42$．………………………………11 分

求得$x\geqslant 7.5$，

又$x\in\mathbf{N}$，故 20 个还未进行进一步检测的样本中，一等品至少需要 8 个．……12 分

保密★使用前

泉州市2021届高中毕业班质量监测（三）参考答案与评析

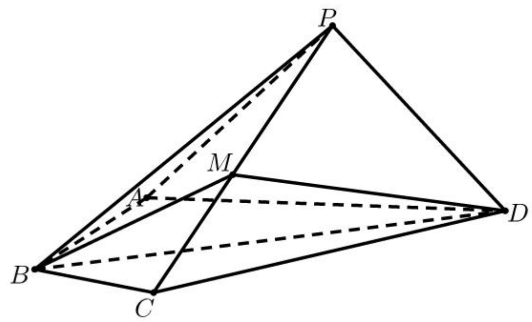
高三数学解答第20至22题部分

20．（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，二面角 $P-AD-C$ 是直二面角，AD 为等腰直角三角形 PAD 的斜边，$AD=CD=2$，$AB=BC=1$，$BD=\sqrt{5}$，M 为线段 PC 上的动点．

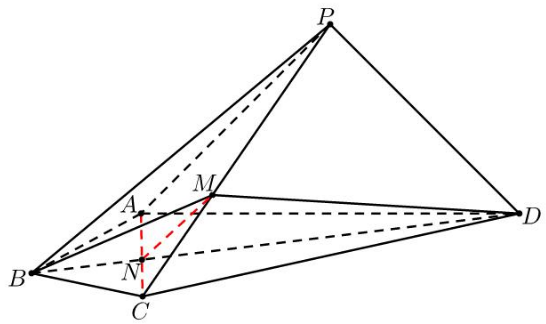
（1）当 $PM=MC$ 时，证明：$PA//$平面 MBD；

（2）若平面 $MBD\perp$平面 $ABCD$，求二面角 $B-MD-C$ 的余弦值．



【命题意图】本题考查空间几何点线面位置关系、线面垂直的性质和判定、面面垂直的判定、点面距离的求法等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化的思想；考查直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养．

【试题解析】



（1） 连结 AC 交 BD 于 N，连结 MN，……………………………………………………1分

因为 $AD=CD=2$，$AB=BC=1$，

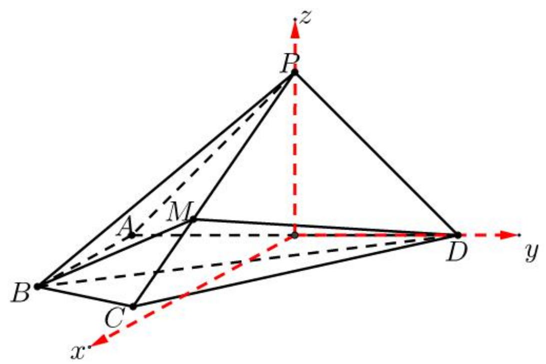
所以 BD 为 AC 的垂直平分线，则 $AN=CN$，……………………………………………2分

又因为 $PM=MC$，所以 MN 为 ΔPAC 的中位线，则 $PA//MN$，…………………………3分

又因为 $PA\not\subset$平面 MBD，$MN\subset$平面 MBD，......4分

所以 $PA//$平面 MBD．……………………………………………………………………4分

（2）



解法一：取 AD 的中点 O，因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$，……………………………………………………………………5 分

过 O 作 AD 的垂线作为 x 轴，分别以 OD,OP 所在的直线为 y 轴，z 轴建立如图空间直角坐标系，

则 $P(0,0,1)$，$A(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，……………………………………………………6 分

由已知 $AB^2+AD^2=1+4=BD^2$，得 $AB\perp AD$，故 $B(1,-1,0)$，……………………7 分

假设 $C(x,y,0)$，因为 $\overrightarrow{AC}=(x,y+1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(x-1,y+1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(x,y-1,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-x+2y+2=0\\ x^2-x+y^2-1=0\end{cases}$，解得 $C(\frac{8}{5},-\frac{1}{5},0)$，…………………………8 分

$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5},-1\right),\overrightarrow{DC}=(\frac{8}{5},-\frac{6}{5},0)$，……………………………………………………9 分

假设平面 MCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}8x_1-y_1-5z_1=0\\ 4x_1-3y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=3,y_1=4,z_1=4$，取 $\boldsymbol{n}_1=\left(3,4,4\right)$，……………………10 分

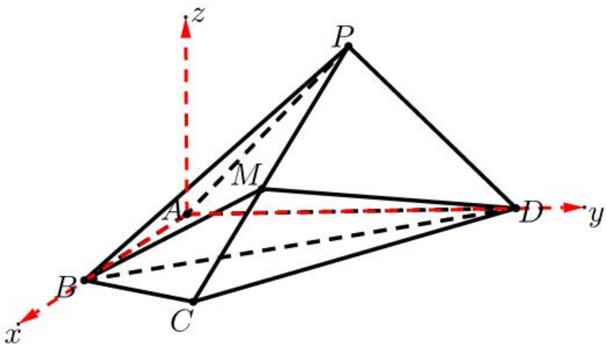
因为平面 $MBD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AC\perp BD$，

所以平面 MBD 的一个法向量是 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0\right)$，取 $\boldsymbol{n}_2=\left(2,1,0\right)$，……………………11 分

假设二面角 $B-MD-C$ 的平面角为 θ，

因为二面角 $B-MD-C$ 的平面角为锐角，

则二面角 $B-MD-C$ 的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{10}{\sqrt{41}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{205}}{41}$． ....12 分



解法二：（1）同解法一；

（2）因为 $AB^2+AD^2=1+4=BD^2$，得 $AB\perp AD$，

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，……………………………………………………5 分

故以点 A 为原点，AB，AD 所在的直线为 x 轴，y 轴，在平面 PAD 内过点 A 作 AD 的垂线为 z 轴建立如图空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,1,1)$，……………………………6 分

$C\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5},0\right)$，……………………………………………………………7 分

于是 $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5},0\right)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5},0\right)$，……………………8 分

假设平面 MCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}y_1-z_1=0\\ 4x_1-3y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=3,y_1=4,z_1=4$，取 $\boldsymbol{n}_1=(3,4,4)$，………………………10 分

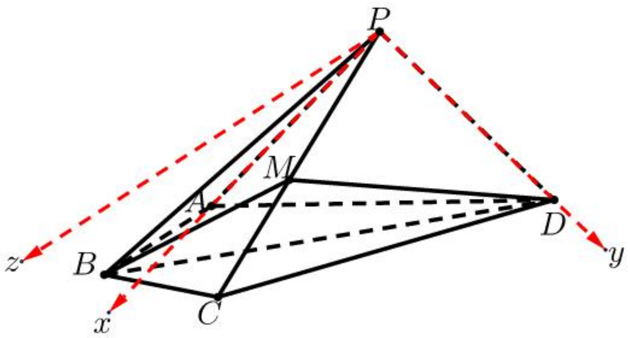
因为平面 $MBD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AC\perp BD$，

所以平面 MBD 的一个法向量是 $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5},0\right)$，取 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,0)$，………………………11 分

假设二面角 $B-MD-C$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{10}{\sqrt{41}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{205}}{41}$．

因为二面角 $B-MD-C$ 的平面角为锐角，所以其大小的余弦值 $\dfrac{2\sqrt{205}}{41}$． ………………… 12 分



解法三：（1）同解法一；

（2）以PA所在直线为x轴，PD所在的直线为y轴，过P作AB平行线为z轴，……5 分

则$A\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$D\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$P\left(0,0,0\right)$，$B\left(\sqrt{2},0,1\right)$，……6 分

$C\left(\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{8}{5}\right)$，……7 分

于是$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{8}{5}\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{8}{5}\right)$，……8 分

假设平面MCD的一个法向量是$\boldsymbol{n}_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}y_1=0\\ 3x_1-3y_1+4\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，令$x_1=4\sqrt{2},y_1=0,z_1=-3$，取$\boldsymbol{n}_1=\left(4\sqrt{2},0,-3\right)$，……10 分

因为平面$MBD\perp$平面$ABCD$，且$AC\perp BD$，

所以平面MBD的一个法向量是$\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{8}{5}\right)$，取$\boldsymbol{n}_2=\left(-1,1,2\sqrt{2}\right)$，……11 分

假设二面角$B-MD-C$的平面角为θ，

则$\cos\theta=\frac{\left|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\right|}{\left|\boldsymbol{n}_1\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}_2\right|}=\frac{\left|-4\sqrt{2}-6\sqrt{2}\right|}{\sqrt{41}\times\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{205}}{41}$.

因为二面角$B-MD-C$的平面角为锐角，所以其大小的余弦值$\frac{2\sqrt{205}}{41}$.……12 分

解法四：（1）同解法一；

（2）取AD的中点O，因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，所以$OP\perp$平面$ABCD$，过O作AD的垂线作为x轴，分别以OD,OP所在的直线为y轴，z轴建立如图空间直角坐标系，……5 分

由已知$AB^2+AD^2=1+4=BD^2$，得$AB\perp AD$，故$B(1,-1,0)$，

又 $P(0,0,1)$，$A(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,2,0)$，……………………………6 分

假设 $C(x_0,y_0,0)$，因为 $\overrightarrow{AC}=(x_0,y_0+1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(x_0-1,y_0+1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(x_0,y_0-1,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-x_0+2y_0+2=0\\ {x_0}^2-x_0+{y_0}^2-1=0\end{cases}$，解得 $C(\frac{8}{5},-\frac{1}{5},0)$，

$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5},-1\right),\overrightarrow{DC}=(\frac{8}{5},-\frac{6}{5},0)$，…………………………………………………7 分

假设 $M\left(x,y,z\right)$，$\overrightarrow{PM}=\left(x,y,z-1\right)$，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=\left(\frac{8}{5}\lambda,-\frac{1}{5}\lambda,-\lambda\right)$，

解得 $M\left(\frac{8}{5}\lambda,-\frac{1}{5}\lambda,1-\lambda\right)$，$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{8}{5}\lambda,-\frac{1}{5}\lambda-1,1-\lambda\right)$，

因为平面 $MBD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AC\perp BD$，则 $AC\perp DM$，

又因为 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0\right)$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DM}=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0\right)\cdot\left(\frac{8}{5}\lambda,-\frac{1}{5}\lambda-1,1-\lambda\right)=\frac{60}{25}\lambda-\frac{4}{5}=0$，

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，于是 $M\left(\frac{8}{15},-\frac{1}{15},\frac{2}{3}\right)$，则 $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{8}{15},-\frac{16}{15},\frac{2}{3}\right)$，……………………………8 分

假设平面 MCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}4x_1-3y_1=0\\ 4x_1-8y_1+5z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=3,y_1=4,z_1=4$，取 $\boldsymbol{n}_1=\left(3,4,4\right)$，……………………… 10 分

依题意可取平面 MBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5},0\right)$，取 $\boldsymbol{n}_2=\left(2,1,0\right)$，………………11 分

假设二面角 $B-MD-C$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\left|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\right|}{\left|\boldsymbol{n}_1\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}_2\right|}=\frac{\left|10\right|}{\sqrt{41}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{205}}{41}$.

因为二面角 $B-MD-C$ 的平面角为锐角，所以其大小的余弦值 $\frac{2\sqrt{205}}{41}$.. ………… 12 分

21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A,B，右焦点为 F，折线 $\left|x-1\right|=my(m\neq 0)$ 与 C 交于 M,N 两点.

（1）当 $m=2$ 时，求 $|MF|+|NF|$ 的值；

（2）直线 AM 与 BN 交于点 P，证明：点 P 在定直线上.

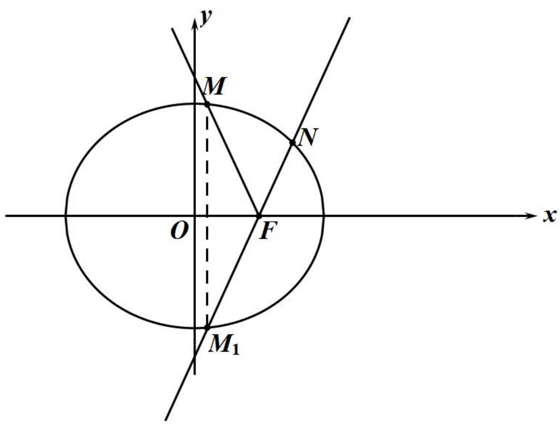
【命题意图】本题主要考查直线与椭圆的位置关系、弦长计算、两直线的位置关系等基础知识；考查运算求解能力、应用意识和创新意识等；考查数形结合、化归与转化等思想；体现综合性、创新性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象、数学抽象等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：（1）由已知可得 $F(1,0)$，设点 M 关于 x 轴的对称点为 M_1，

则 $|MF|=|M_1F|$，…………………………………………………………………………………1 分

如图，不妨设直线 $x=2y+1$ 与椭圆相交于 M_1,N 两点，



设 $M_1(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} x=2y+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $3(2y+1)^2+4y^2-12=0$，即 $16y^2+12y-9=0$，……………3 分

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{3}{4},y_1y_2=-\dfrac{9}{16}$，…………………………………………………………4 分

故 $|MF|+|NF|=|M_1F|+|NF|=|M_1N|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$=\sqrt{1+2^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{5\cdot5\cdot\frac{9}{16}}=\frac{15}{4}.$$ ………………………………5 分

（2） 由已知可得 $A(-2,0),B(2,0)$，$M_1(x_1,y_1)$，$M(x_1,-y_1),N(x_2,y_2)$，

不妨设直线 $x=my+1$ 与椭圆相交于点 M_1,N，

联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $3(my+1)^2+4y^2-12=0$，即 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，……6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$， ··7 分

且 $my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$. ··8 分

直线 $AM:y=\dfrac{-y_1}{x_1+2}(x+2)$，

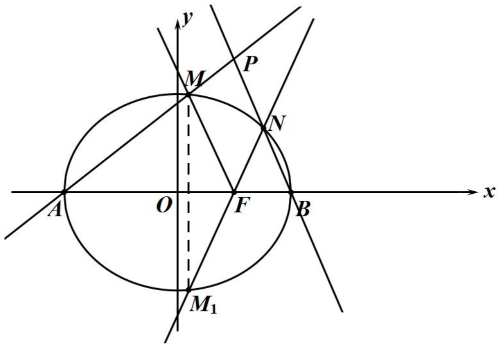
直线 $BN:y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ··9 分

联立两直线方程，消去 y 可得 $\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=-\dfrac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2-1)}$， ························10 分

即 $\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{my_1y_2+3y_2}{my_2y_1-3y_1}=-\dfrac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}=-3$， ··11 分

所以 $x+2=-3(x-2)$， $x=1$，

即点 P 在定直线 $x=1$ 上. ··12 分



解法二：（1）同上.

（2）由已知可得 $A(-2,0),B(2,0)$， $M_1(x_1,y_1)$， $M(x_1,-y_1),N(x_2,y_2)$，

不妨设直线 $x=my+1$ 与椭圆相交于点 M_1,N，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，可得 $3(my+1)^2+4y^2-12=0$，即 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，···6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$， ··7 分

直线 $AM:y=\dfrac{-y_1}{x_1+2}(x+2)$，

直线 $BN: y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$， ………………………………………………………………………… 8 分

由点 M 在椭圆上，可知 ${y_1}^2=-\dfrac{3}{4}({x_1}^2-4)$，

所以 $\dfrac{-y_1}{x_1+2}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_1-2}{y_1}$，

所以直线 $AM: y=\dfrac{3}{4}\dfrac{x_1-2}{y_1}(x+2)$， ……………………………………………………………… 9 分

联立两直线方程，消去 y 可得 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_1-2}{y_1}(x+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

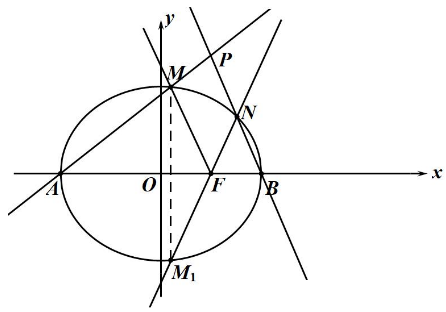
即 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$， …………………………………………………………………… 10 分

即 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1-1)(my_2-1)}=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1}$，

所以 $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{-9}{-9m^2+6m^2+3m^2+4}=-\dfrac{9}{4}$， …………………………………………… 11 分

所以 $x+2=-3(x-2)$， $x=1$，

即点 P 在定直线 $x=1$ 上． ………………………………………………………………………………… 12 分



解法三：（1）同上．

（2）由已知可得 $A(-2,0),B(2,0)$， $M_1(x_1,y_1)$， $M(x_1,-y_1),N(x_2,y_2)$，

不妨设直线 $x=my+1$ 与椭圆相交于点 M_1,N，

联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $3(my+1)^2+4y^2-12=0$，即 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，……6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$， ……………………………………………………… 7 分

设直线 AM_1,AN 的斜率分别为 k_1,k_2，则

$$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}$$

$=\dfrac{-9}{-9m^2-18m^2+27m^2+36}=-\dfrac{1}{4}$，……………………………………………………8 分

所以直线 AM,AN 的斜率满足 $-k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$，

又设直线 BN 的斜率为 k_3，则

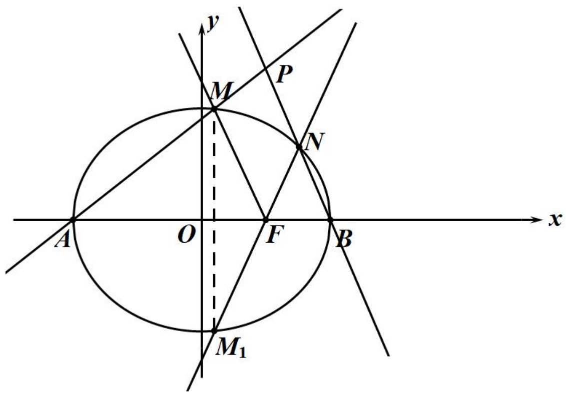
$k_2\cdot k_3=\dfrac{y_2}{x_2+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{{y_2}^2}{{x_2}^2-4}=-\dfrac{3}{4}$……………………………………………………9 分

所以直线 AM,BN 的斜率满足 $\dfrac{-k_1}{k_3}=-\dfrac{1}{3}$……………………………………………………10 分

故直线 $AM:y=-\dfrac{1}{3}k_3(x+2),BN:y=k_3(x-2)$……………………………………11 分

联立解得 $x=1$，

即点 P 在定直线 $x=1$ 上．……………………………………………………………………12 分



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x$．

（1）若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 单调递减，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：对任意整数 a，$f(x)$ 至多 1 个零点．

【命题意图】本小题主要考查函数与方程，不等式，导数的应用等基础知识，考查逻辑推理，运算求解能力，体现综合性，导向对发展数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养的关注．

【试题解析】解法一：

（1）$f'(x)=-a\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1$．……………………………………………1 分

【当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 显然成立．

……………………………………（无持续求解，只写这一结论，可补这 1 分.)2 分】

$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 单调递减 $\Leftrightarrow$ 对 $x\in(0,2\pi)$，恒有 $f'(x)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $x\in(0,2\pi)$，恒有 $a\geqslant \mathrm{e}^x\left(\cos x-1\right)$，…………………2 分

令 $g(x)=\mathrm{e}^x\left(\cos x-1\right)$（$x\in[0,2\pi]$），……………………………………………………3 分

则 $g'(x)=\mathrm{e}^x\left(\cos x-1-\sin x\right)=-\mathrm{e}^x\left(\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1\right)$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{3\pi}{2}$（或 $x=0$, 或 $x=2\pi$）. ……………………………………4 分

则当 $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g(x)$ 单调递增. ……………………… 5 分

又 $g(0)=g(2\pi)=0$，所以当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$g(x)_{\max}=0$.

所以 $a\geqslant 0$. ………………………………………………………………………………… 6 分

（2）令 $\varphi(x)=\sin x-x$，则 $\varphi'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递减，

又因为 $\varphi(0)=0$，

所以 $x\geqslant 0$ 时，$\sin x-x\leqslant 0$；$x<0$ 时，$\sin x-x>0$. ………………………… 7 分

令 $F(x)=a+\mathrm{e}^x(\sin x-x)$，则 $F(x)$ 与 $f(x)$ 零点一致. …………………………8 分

当 $x\geqslant 0$ 时，$F'(x)=\mathrm{e}^x\left((\sin x-x)+\left(\cos x-1\right)\right)\leqslant 0$，

所以 $F(x)$ 递减，$F(x)\leqslant F(0)=a$. ……………………………9 分

当 $x<0$ 时，有 $a<a+\mathrm{e}^x(\sin x-x)\leqslant a+\mathrm{e}^x(1-x)$，

令 $G(x)=a+\mathrm{e}^x(1-x)\left(x<0\right)$，

因为 $G'(x)=-x\mathrm{e}^x>0$，$G(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，

所以 $G(x)<G(0)=a+\mathrm{e}^0(1-0)=a+1$. ……………………………10 分

故 $a<F(x)<a+1$.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$F(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 有唯一零点，在 $x<0$ 恒正不存在零点；………… 11 分

当 $a\leqslant -1$ 时，$F(x)<a+1\leqslant 0$，不存在零点. ……………………… 12 分

即对任意整数a，$F(x)$至多1个零点，所以$f(x)$至多1个零点.

解法二：（1）同解法一

（2）当$a\geqslant 0$时，$f'(x)=-a\mathrm{e}^{-x}+(\cos x-1)\leqslant 0$恒成立，$f(x)$为递减函数，

所以$f(x)$至多1个零点. ……………………7分

令$\varphi(x)=\sin x-x$，则$\varphi'(x)=\cos x-1\le 0$，所以$\varphi(x)$单调递减，

又因为$\varphi(0)=0$

则$x\geqslant 0$时，$\sin x-x\leqslant 0$；$x<0$时，$\sin x-x>0$. ……………………8分

当$a\leqslant -1$时，$f(x)=a\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x\leqslant -\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x$. ……………………9分

令$\phi(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x$.

当$x\geqslant 0$时，$\phi(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x<\sin x-x\leqslant 0$. ……………………10分

当$x<0$时，$\phi'(x)=\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1$；$\phi''(x)=-\mathrm{e}^{-x}-\sin x\leqslant -1-\sin x\leqslant 0$，

所以$\phi'(x)$在$x<0$时单调递减，此时$\phi'(x)>\phi'(0)=1$，

所以$\phi(x)$在$x<0$时单调递增，

所以$\phi(x)\leqslant\phi(0)=-1$.

综上所述，当$a\leqslant -1$时，$\phi(x)<0$. ……………………11分

所以当$a\leqslant -1$时，$f(x)\leqslant -\mathrm{e}^{-x}+\sin x-x<0$. ……………………12分

所以，对任意整数a，函数$f(x)$至多1个零点.